

Komplexe Zahlen

Betrachtung verschiedener Darstellungsformen

~ Lösungen ~

? Weitere Eigenschaften komplexer Zahlen

Im Folgenden werden wir weitere Eigenschaften einer komplexen Zahl $z = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ kennenlernen, indem wir die Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene verwenden.

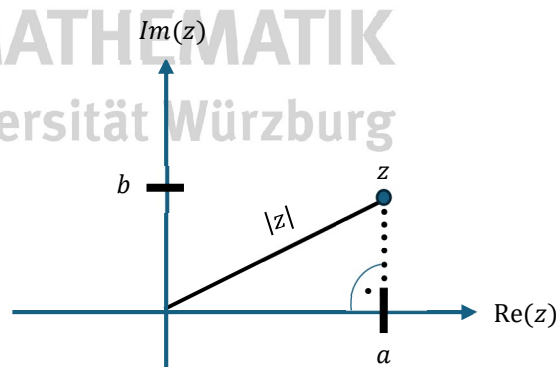
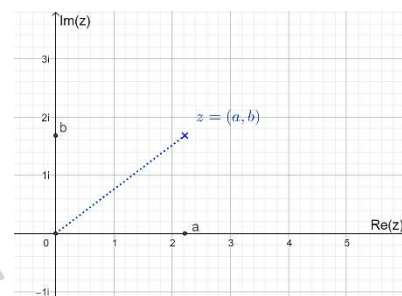
- a) Bestimmen Sie die Länge des Zeigers einer komplexen Zahl. In der Gaußschen Zahlenebene wird dies als **Betrag** bezeichnet.

Lösung:

Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Länge des Zeigers bestimmen:

Für jede komplexe Zahl $z = (a, b)$ gilt somit:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Das **Argument** einer komplexen Zahl $\arg(z)$ ist der gerichtete Winkel zwischen der reellen Achse und dem Ortsvektor des Punktes z in der komplexen Ebene.

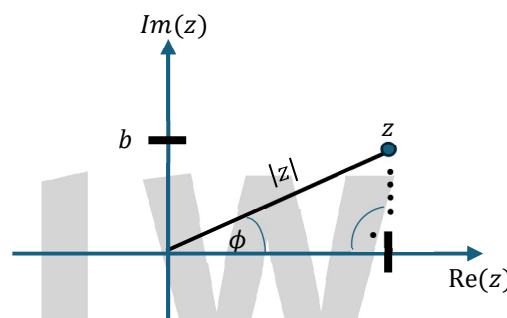
- b) Bestimmen Sie mit obiger Definition das Argument $\arg(z) := \phi$ einer komplexen Zahl.

Lösung:

Betrachtet man den Tangens im rechtwinkligen Dreieck, ergibt sich für $z = a + ib$ und $\phi := \arg(z)$: $\tan \phi = \frac{a}{b}$

$$\rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

[Die Umkehrfunktion des Tangens ist der Arcustangens, damit wäre also: $\phi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$.]



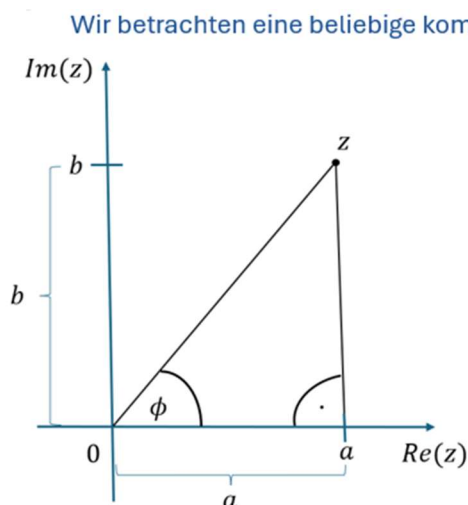
? Die Polarform komplexer Zahlen

Jede komplexe Zahl lässt sich (neben der algebraischen Form) in Polarform angeben, d.h. es gilt:

$$z = a + ib = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$$

Beweisen Sie diese Aussage.

Lösung (aus dem Skript):



Wir betrachten eine beliebige komplexe Zahl $z = a + ib$ in der gaußschen Zahlenebene. Die Hypotenuse im eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck ist der Abstand von z zum Nullpunkt, also $|z|$. Durch die bekannten Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck erhält man:

$$\sin \phi = \frac{b}{|z|} \text{ sowie } \cos \phi = \frac{a}{|z|}.$$

Daraus folgt: $b = |z| \sin \phi$ und $a = |z| \cos \phi$.

Damit ergibt sich die Polarform:

$$\begin{aligned} z = a + ib &= |z| \cos \phi + i |z| \sin \phi \\ &= |z|(\cos \phi + i \sin \phi) \end{aligned}$$

? Darstellungsformen komplexer Zahlen

Betrachten Sie in dem Applet die beiden Darstellungsformen sowie die Rechenoperationen von komplexen Zahlen. Welche Vor- und Nachteile können Sie jeweils für die Darstellung der komplexen Zahlen in der algebraischen Form und in der Polarform ausfindig machen?

Lösung:

	Vorteile	Nachteile
Algebraische Form	Erklärende Darstellung der Addition und Subtraktion	Keine Erklärung von Multiplikation und Division möglich
Polarform	Erklärende Darstellung der Multiplikation und Division	Keine Darstellung von Addition und Subtraktion möglich

? Komplexe Zahlen und Matrizen?!

Man kann die komplexen Zahlen auch mithilfe von Matrizen darstellen. Hierfür werden die reelle Einheit 1 durch die Einheitsmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die imaginäre Einheit i durch die Matrix $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $I^2 = -E$ dargestellt.

Analog zur algebraischen Darstellung einer komplexen Zahl $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt in der Matrizendarstellung einer komplexen Zahl $Z \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: $\text{Re}(Z) = a$, $\text{Im}(Z) = b$.

- a) Finden Sie mithilfe der obigen Informationen die Matrizendarstellung einer komplexen Zahl $Z = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$ mit $Z \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ heraus.

Lösung:

- a) *Hinweis:* Die Matrix I könnte man auch selbständig durch das Lösen von Gleichungssystemen herausfinden. Hierfür müsste man neben $I^2 = -E$ auch noch $I^3 = -I$ als Voraussetzung angeben.

Für jede komplexe Zahl $Z \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt analog zur algebraischen Darstellung:

$$Z = a \cdot E + b \cdot I$$

Setzen wir nun die bekannten Matrizen aus obiger Einführung ein, erhalten wir mit Matrizenaddition und Skalarmultiplikation:

$$Z = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

- b) Analog zur Polarform der komplexen Zahl lässt sich auch die Matrixdarstellung umformen. Zeige mithilfe der Polarform $z = a + ib = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$, dass die Matrixdarstellung einer komplexen Zahl Z auch folgendermaßen aussehen kann:

$$Z = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wegen $z = a + ib = |z| \cos \phi + i |z| \sin \phi$ ergibt sich:

$$a = |z| \cos \phi \text{ und } b = |z| \sin \phi$$

Damit ist

$$Z = \begin{pmatrix} |z| \cos \phi & -|z| \sin \phi \\ |z| \sin \phi & |z| \cos \phi \end{pmatrix} = |z| \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Bei Betrachtung einer komplexen Zahl in der gaußschen Zahlenebene erkennt man, dass $|z| = r$ gilt. Somit ist:

$$Z = |z| \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

- c) Wir betrachten nun speziell die Multiplikation einer komplexen Zahl in der gaußschen Zahlenebene: Beschreiben Sie, welche Abbildung zu den Matrizen gehört, wenn man sie wie in (b) darstellt.

Lösung:

Die zu den Matrizen gehörenden linearen Abbildungen sind **Drehstreckungen** im \mathbb{R}^2 (sofern a und b nicht beide Null sind). Damit beschreibt die Matrix

$$Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

eine Drehstreckung mit Faktor r und Winkel ϕ im mathematisch positiven Sinne (also entgegen dem Uhrzeigersinn).